Aufgabe 1. **9 Punkte**

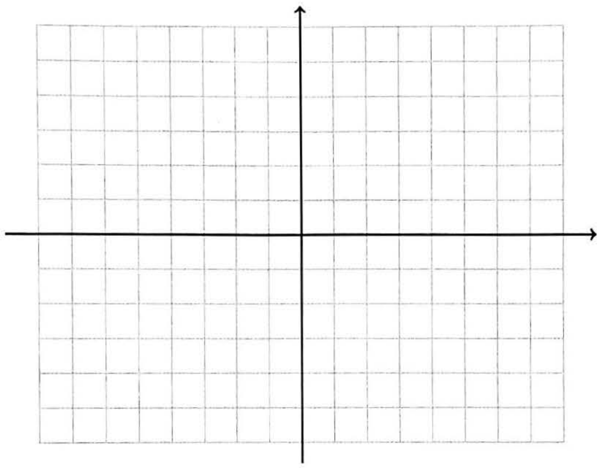
(a) Bestimmen Sie den ggT von 486 und 864.

☐ 100	☐ 42	☐ 15	☐ 3	☐ 1
☐ 54	☐ 36	☐ 10	☐ 2	☐ andere

(b) Welche der folgenden Zahlen stimmen mit der komplexen Zahl $\frac{1}{2+i}$ überein?

☐ $\frac{1}{2-i}$ ☐ $\frac{2}{5}$ ☐ $\frac{2-i}{5}$ ☐ $\frac{2}{5}+\frac{1}{5i}$ ☐ $2-i$ ☐ $\frac{2}{5}+\frac{i^3}{5}$

(c) Skizzieren Sie die Menge $\{ z \in \mathbb{C} \colon \mathfrak{Re}(z)^3 - \mathfrak{Im}(z) \leq 2 \}$ in die Gaußsche Zahlenebene. Beschriften und skalieren Sie die Achsen.



Aufgabe 2. **21 Punkte**

(a) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gelte:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Was lässt sich über die Folge sagen? Die Folge (a_n) ist ...

☐ eine Cauchyfolge	☐ eine Nullfolge	☐ konstant
☐ beschränkt	☐ alternierend	☐ konvergent

(b) Welche der folgenden Folgen sind beschränkt?

☐ $(3^{-n}n^a), a > 1$	☐ $(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$	☐ $(\sqrt[n]{a}), a > 0$
☐ $(\frac{3n^4+17n}{4n^3-42n})$	☐ $(\frac{2^n}{n^{42}})$	☐ keine

(c) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

☐ $\sum_{n\geq 1} n^{-3}(n+3)!$ ☐ $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n^3+2n+1}$ ☐ $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n^n}, x \in \mathbb{R}$ ☐ keine

(d) Welche der folgenden Abbildungen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

☐ $f(x) = \lvert x \rvert$	☐ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$	☐ $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1, & x \leq 0; \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$
☐ $f(x) = \sum_{n=0}^{10} x^n$	☐ $f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^4+1}$	☐ $f(x) = x \cdot \lvert x \rvert$

Nachname: Vorname: Mat.-Nr.:

(e) Seien $m, n \in \mathbb{R}$. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = (x+1)^2$, falls $x \leq 0$ und $f(x) = mx + n$, falls $x > 0$. Für welche Werte $m, n \in \mathbb{R}$ ist f stetig?

☐ $m, n \in \mathbb{R}$ ☐ $m = 2$, $n = 1$ ☐ $n \in \mathbb{R}$, $m = 2$ ☐ $m \in \mathbb{R}$, $n = 1$ ☐ $m = 0$, $n = 1$ ☐ nie

(f) Gegeben sei die Abbildung $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 + 3x$. Berechnen Sie, falls möglich, die Ableitung der Umkehrfunktion von f an der Stelle 7.

☐ $1/11$ ☐ 11 ☐ -11 ☐ $(f^{-1})'(7)$ ex. nicht.
☐ $-1/5$ ☐ 1 ☐ $1/2$ ☐ anderer Wert

(g) Gegeben sei die Abbildung $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 4$. Kreuzen Sie die Stellen an, an denen lokale Maxima von f liegen.

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ -1 ☐ $\frac{1}{2}$
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ -2 ☐ gibt keine

Aufgabe 3. **7 Punkte**

(a) Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$?

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ (für $c \in \mathbb{R}$ beliebig) stetig sind.

(c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass dann auch $f + g$ und cf stetig sind in x_0.

Zusatzaufgabe 1. **5 Zusatzpunkte**

(a) Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ gilt.

(b) Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{i \geq 0} q^i$ genau dann konvergiert wenn $|q| < 1$.

(c) Berechnen Sie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{3^{i+2}}$.

Zusatzaufgabe 2. **2 Zusatzpunkte**

Zeigen Sie, dass ein $x \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq x \leq 2$ existiert, sodass gilt $x^3 + x = 3$.

Viel Erfolg!

——— ENDE ———

Nachname: Vorname: Mat.-Nr.: