Mathematik für Informatiker 1 - Klausur vom 10.02.2015

Dienstag, 10. Februar 2015

1. A und B seien Aussagen. Zeigen sie mithilfe einer Wahrheitstafel:

   $\neg(A \Leftrightarrow B)$ und $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ sind logisch äquivalent.

2. Beweisen sie mittels vollständiger Induktion:

   $$\sum_{k=1}^{\infty} 3k^2 - 3k + 1 = n^3$$

3. Komplexe Zahlen:

   a. Skizzieren sie sie Mengen Z_1, Z_2 sowie $Z_1 \cap \bar{Z}_2$ komplexer Zahlen für:

      $Z_1 = \{z \in \mathbb{C} | re(z)^2 + \mathrm{i}m(z)^2 \leq 4^2\}$
      $Z_2 = \{z \in \mathbb{C} | re(z) > 1 \wedge \mathrm{i}m(z) < 2\}$

      In der gaußschen Zahlenebene.

   b. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 3 - 4i$ und $z_2 = 9\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi\mathrm{i}}$
      Berechnen sie:
      i. $u = \frac{z_1 * \bar{z}_2}{z_2}$

      ii. $v = (z_2)^{\frac{1}{2}}$

4. Konvergenz, Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

   a. Bestimmen sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe
      $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n$$
      Ermitteln sie Konvergenzverhalten für x = +R und x = -R

   b. Die Funktionen $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ ist für $x = 0$ nicht definiert.
      Bestimmen sie $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$!

   c. Es sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter erster Ableitung.

      Zeigen sie: Dann gilt $|f(b) - f(a)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

5. Es sei $A = \{1,2,3,4\}$ und $M \subseteq A \times A$

   a. Die Menge $M = \{(1,2), (4,2)\}$ kann durch weitere Elemente $(a, b) \in A \times A$ ergänzt werden so, dass M eine Äquivalenzrelation auf A wird. Notieren sie zwei verschiedene Möglichkeiten dies zu tun, d.h. geben sie jeweils die Mengen M mit all ihren Elementen an!

   b. Geben sie die Äquivalenzklassen der so entstandenen Äquivalenzrelation an!

   c. Gibt es weitere auf Ergänzung von $M = \{(1,2), (4,2)\}$ basierende Äquivalenzklassen auf A? Begründen Sie.

6. Bilden sie die unbestimmte Stammfunktion mithilfe der partiellen Integration und führen sie eine Probe durch.

   $$\int \frac{2x}{3} \cos(2x) \, \mathrm{d}x$$