Dr. Jana de Wiljes

Klausur zu Mathematik für Informatiker 2

Grundsätzlich sind alle Aussagen zu begründen!
Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Viel Erfolg!

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Bitte beschriften Sie **jedes** Blatt mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer.

Klausurteil	A1	A2	A3	A4	A5	A6	$\sum$	Note
Punkte	/9	/12	/8	/13	/7	/14		

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 Punkte)
Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen Unterräume des angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraums sind:

a) $U_1 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) = 0\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$,

b) $U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1-t \\ 5t-5 \\ 3-3t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$,

c) $U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (2 + 6 + 4 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -14 & -28 & -44 \\ -7 & -14 & -23 \\ 9 & 18 & 29 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von A und die zugehörigen Eigenvektoren v_1, v_2 und v_3.

c) Bestimmen Sie S und S^{-1} mit $D = SAS^{-1}$ und

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Dr. Jana de Wiljes

Klausur zu Mathematik für Informatiker 2

Grundsätzlich sind alle Aussagen zu begründen!
Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Viel Erfolg!

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Bitte beschriften Sie **jedes** Blatt mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer.

Klausurteil	A1	A2	A3	A4	A5	A6	$\sum$	Note
Punkte	/9	/12	/8	/13	/7	/14		

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 Punkte)
Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen Unterräume des angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraums sind:

a) $U_1 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) = 0\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$,

b) $U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1-t \\ 5t-5 \\ 3-3t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$,

c) $U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (2 + 6 + 4 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -14 & -28 & -44 \\ -7 & -14 & -23 \\ 9 & 18 & 29 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von A und die zugehörigen Eigenvektoren v_1, v_2 und v_3.

c) Bestimmen Sie S und S^{-1} mit $D = SAS^{-1}$ und

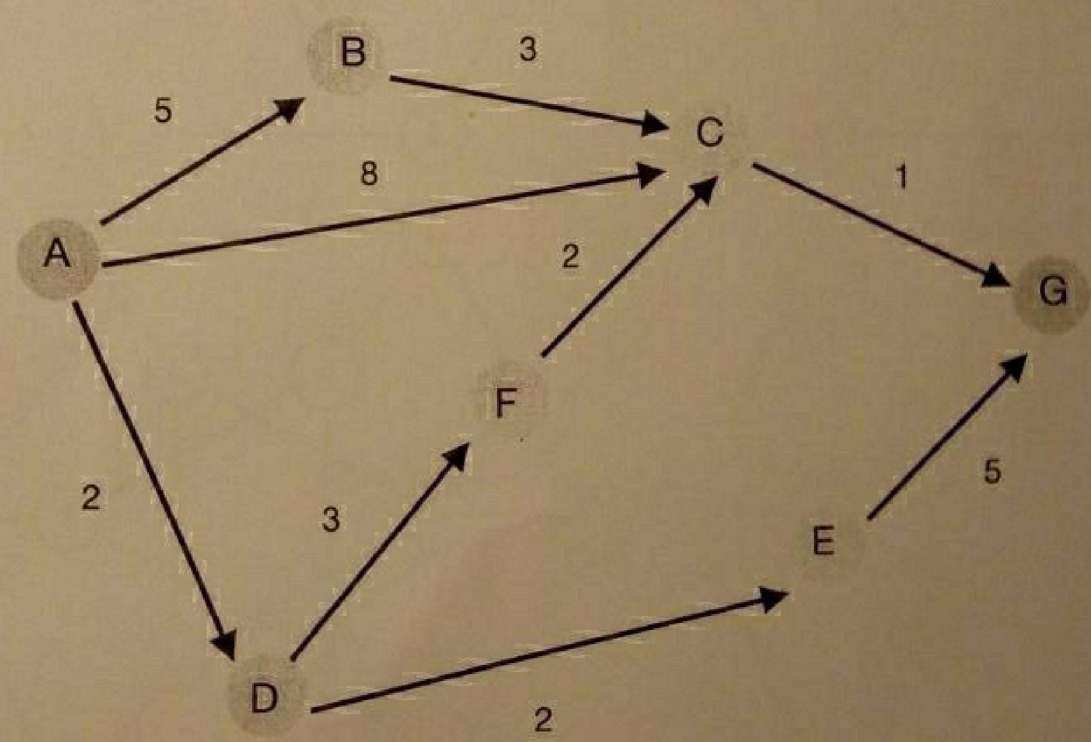
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Prüfen Sie, ob die Vektoren

$$v_1 = x^2 - 4x + 1 \tag{3}$$
$$v_2 = 3x - 2 \tag{4}$$
$$v_3 = 2 \tag{5}$$

eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ bilden. Falls v_1, v_2, v_3 eine Basis bilden sollten, stellen Sie das Polynom $p(x) = 2x^2 - 11x - 1$ als Linearkombination dieser drei Vektoren dar.

Aufgabe 4 (13 Punkte)
Bestimmen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus alle kürzesten Wege vom Startknoten A. Geben Sie jeden Iterationsschritt des Algorithmus explizit in Tabellenform an.

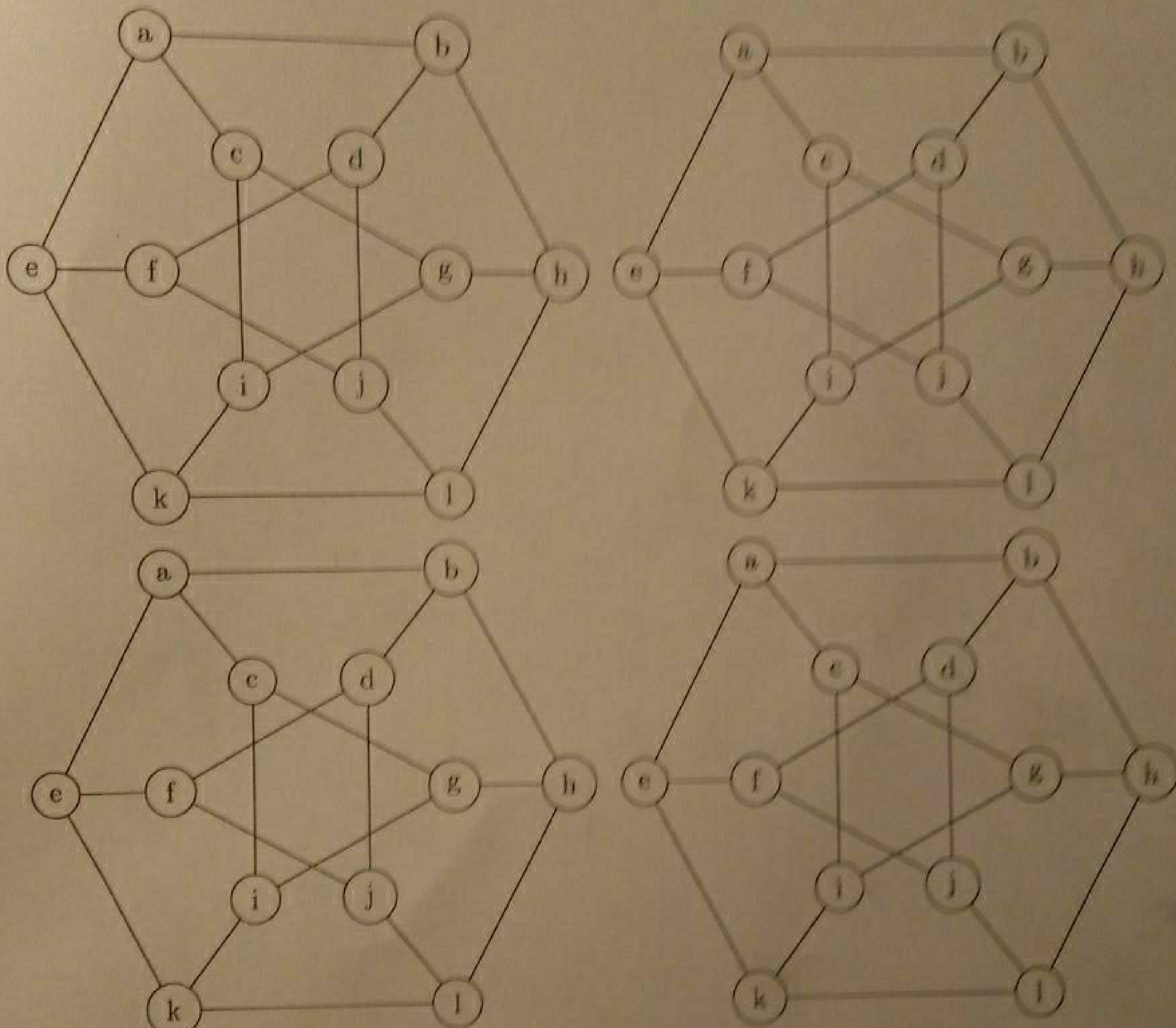


Aufgabe 5 (7 Punkte)
Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ ohne Dreiecke. Zeigen Sie

$$d(u) + d(v) \leq |V|$$

für alle benachbarten $u, v \in V$.

Aufgabe 6 (1 + 3 + 4 + 3 + 3 Punkte)
Gegeben sei der Dürer-Graph $\mathcal{DG}$ (hier viermal gezeichnet zur einfacheren Bearbeitung der Teilaufgaben):



a) Wie viele Kanten besitzt ein aufspannender Baum von $\mathcal{DG}$?

b) Finden Sie eine maximale Anzahl an eckendisjunkten a-j-Pfaden.

c) Bestimmen Sie $\mathrm{cr}(\mathcal{DG})$.

d) Besitzt $\mathcal{DG}$ ein perfektes Matching?

e) Zeigen Sie, dass für die chromatische Zahl $\chi(\mathcal{DG}) = 3$ gilt.