Mathematik III für Informatiker - Klausur SoSe 2020

Aufgabe 1 (12 Punkte):

Gegeben sei das Integral

$I = \int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$

1. Berechnen Sie I exakt!
2. Bestimmen Sie I näherungsweise mit Hilfe der numerischen Integration durch Anwendung der Gauss-Quadratur mit den Stützstellen $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und den gewichten $b_0 = b_1 = 1$. Geben Sie das Ergebnis auf 3 Nachkommastellen gerundet an.
3. Welche Ordnung besitzt diese Quadratur? Würde die Funktion $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ exakt auf dem Intervall [0,1] integriert werden?

Aufgabe 2 (10 Punkte):

Gegeben seien die Wertepaare (x_i, y_i) laut Tabelle.

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	⅓
2	2	¼

1. Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade an diese Punkte.
2. Bestimmen Sie den Koeffizient a der Funktion $h(x) = e^{ax}$ näherungsweise mit **einem** Schritt des Gauss-Newton-Verfahrens.
3. Bestimmen Sie den Koeffizient a exakt.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Gegeben sei die Funktion

$f(x) = x - e^{-x2}$

1. Zeigen Sie: f besitzt im Intervall [0,2] eine Nullstelle!
2. Berechnen Sie diese näherungsweise, indem Sie genau zwei Schritte des Newtonverfahren durchführen!

Aufgabe 4 (16 Punkte):

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2;1)\}$ mit

$f(x,y) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{y-1} + 4x - y$

1. Bestimmen Sie die lokalen Extrempunkte (Ort, Wert & Art) und Sattelpunkte von f
2. Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle (0;2).

Aufgabe 5 (12 Punkte):

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$y' \times x^{-5} = 6y^3$ mit $y(0) = ½$

Es soll im Intervall $I = [0;1]$ gelöst werden.

1. Berechnen Sie mit dem Eulerverfahren die in *i* liegenden Näherungswerte der Lösungsfunktion für die Schrittweite $h = ½$.
2. Berechnen Sie die Exakte Lösung des Anfangswertproblems!

Aufgabe 6 (12 Punkte):

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwort an. (Nur eine Antwort ist richtig)

1. Wie lautet der maximake Definitionsbereich der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit
   $f(x,y) = \frac{2\,x + 1}{\log(y - 2)}$
   - [ ] $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2\}$
   - [ ] $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2\}$
   - [ ] $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 3, y \geq 2\}$
   - [ ] $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 3, y < 2\}$
   - [x] $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 3, y > 2\}$
   - [ ] Keine der Aussagen

2. Welches ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL
   $y'' = -4y$
   - [ ] $y(x) = C_1 \times e^x + C_2 \times e^{-x}$
   - [ ] $y(x) = C_1 \times e^{-2x} + C_2 \times e^{-2x}$
   - [ ] $y(x) = C_1 \times e^{2x} + C_2 \times e^{2x}$
   - [ ] $y(x) = C_1 \times e^x \sin(2x) + C_2 \times e^x \cos(2x)$
   - [x] $y(x) = C_1 \times \sin(2x) + C_2 \times \cos(2x)$
   - [ ] Keine der Aussagen

3. Bei der Gauß-Quadratur verwenden man für das Integrationsintervall [-1, 1] als Stützstellen der Quadraturformel die Nullstellen der Legendre-Polynome, welche für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert sind durch
   $P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \times \frac{\partial^n (x^2 - 1)^n}{\partial x^n}$
   Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
   - [ ] Die Legendre-Polynome mit geradem Index *n* sind symmetrisch zur Abzissenachse.
   - [x] Das Legendre-Polynom P_n ist orthogonal zu jedem Polynom niedrigeren Grades
   - [ ] Die Legendre-Polynome bilden im Intervall [0, 1] ein Orthogonalsystem
   - [ ] Nach obiger Definition gilt $P_1(x) = x^2$
   - [ ] keine der Angaben

4. Wie lautet die Länge der parametisierten Kurve

$c(t) = \begin{pmatrix} cos\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right) \\ sin\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right) \end{pmatrix}$, $t \geq 0$

für $t \in [0, a]$ und $a > 0$.

- [ ] 1
- [ ] $1/a$
- [ ] $1/\sqrt{a}$
- [ ] $2\,a$
- [x] $\sqrt{a}$
- [ ] a