

# Übungsblatt 14: Probeklausur (fakultativ)

Abgabe bis **22.2.2022, 08:00 Uhr auf Moodle**

Vorlesung *Mathematik I für Informatiker*, Institut für Mathematik,  
**Prof. Dr. M. Holschneider**, Dr. H. Matuschek, Dr. B. Fiedler  
<https://moodle2.uni-potsdam.de/course/view.php?id=25624>

**Hinweis:** Bitte geben Sie in Gruppen von mindestens **drei** bis maximal **fünf** Studierenden ab. Für die Zulassung zu der Klausur müssen mindestens 75% aller möglichen Punkte erreicht werden. Bei Fragen bitte eine E-Mail an [hannes.matuschek@uni-potsdam.de](mailto:hannes.matuschek@uni-potsdam.de)

**Aufgabe 1:** Es seien  $A$  und  $B$  Mengen über dem gleichen Grundbereich  $M$ . Zeigen Sie: **(2 Punkte)**

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

**Aufgabe 2:** Wir betrachten die Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  einer endlichen Menge  $M$  mit  $n$  Elementen. Zeigen Sie, dass für  $A, B \in \mathcal{P}(M)$  die Relation **(2 Punkte)**

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B \text{ bijektiv}$$

eine Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 3:** Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  **(4 Punkte)**

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

gilt.

**Aufgabe 4:** Komplexe Zahlen

a) Skizzieren Sie die Menge **(3 Punkte)**

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 = \operatorname{Re}^2(z) - 2 \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}^2(z)\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) - 1 \geq 0\}$$

in der gaußschen Zahlenebene.

b) Bestimmen Sie **alle** Nullstellen des Polynoms  $p(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ . **(4 Punkte)**

c) Gegeben die komplexen Zahlen  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $z_2 = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$ . Berechnen Sie die Zahl **(3 Punkte)**  
 $\frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$  und geben Sie sie sowohl in arithmetischer sowie exponentialform an.

**Aufgabe 5:** Gegeben sei die Reihe

**(3 Punkte)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3n 2^{-n} (z - i)^n.$$

Bestimmen Sie je ein  $z \in \mathbb{C}$  für das die Reihe konvergiert und divergiert. Begründen Sie ihre Wahl!

**Aufgabe 6:** Differential- und Integralrechnung

- a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, alle Extrema sowie das Verhalten im Unendlichen für die Funktion **(4 Punkte)**

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}.$$

- b) Bestimmen Sie das Integral

**(4 Punkte)**

$$\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx.$$

**Aufgabe 7:** Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwort an. (Nur eine Antwort ist richtig!) **(6 Punkte)**

a) Wie lautet der maximale Definitionsbereich der Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \ln(9 - x^2) ?$$

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$            | <input type="checkbox"/> $D = (-3; 3)$                                    |
| <input type="checkbox"/> $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$            | <input type="checkbox"/> $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$ |
| <input type="checkbox"/> $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3, x \neq 3\}$ | <input type="checkbox"/> keine der Aussagen                               |

b) Welches ist die Tangentengleichung der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $f(x) = e^{-x}$  an der Stelle  $x_0 = 0$ ?

- |   |  |   |
|---|--|---|
| <input type="checkbox"/> $p_1(x) = x - 1$ | <input type="checkbox"/> $p_1(x) = 2x - 1$ | <input type="checkbox"/> $p_1(x) = -x + 1$  |
| <input type="checkbox"/> $p_1(x) = x$     | <input type="checkbox"/> $p_1(x) = -x - 1$ | <input type="checkbox"/> keine der Aussagen |

c) Wie lautet der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x)}{2x} ?$$

- |                            |  |  |
|----------------------------|--|--|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{2}$    |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2             | <input type="checkbox"/> keine der Angaben |

d) Wie lautet die Prüfziffer  $z_{10}$  des folgenden ISBN-10 Codes : 3-834-80757- $z_{10}$ .

- |                            |                            |  |
|----------------------------|----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> X (10)            |
| <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> keine der Angaben |

e) Jede stetige Funktion ist auf dem Intervall  $[a, b]$  integrierbar.

- |                               |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
|-------------------------------|---------------------------------|

f) Die Funktion  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $f(x) = x^2$  ist bijektiv.

- |                               |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
|-------------------------------|---------------------------------|

**Viel Spaß und viel Erfolg!**