Aufgabe 1:

Geben Sie mit einer kurzen Erklärung an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Eine Kurve mit einer konstanten Krümmung ist eine Gerade.

b) Sei f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dann ist die Hesse – Matrix von f symmetrisch.

c) Ein Ausgleichsproblem mit $min_{x \epsilon \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2$ hat für $b \epsilon \mathbb{R}^n$ und $A \epsilon \mathbb{R}^{m\,x\,n}, m \geq n$, immer eine eindeutige Lösung.

d) Die Quadraturformel ist von Ordnung p, falls sie alle Polynome vom Grad höchstens p exakt integriert und mindestens ein Polynom vom Grad p + 1 nicht exakt integriert.

e) Für die stetig differenzierbare Funktion f konvergiert das Newton – Verfahren für beliebige Startwerte gegen eine Lösung.

f) Ist $A \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, $N_0(f)$ eine Höhenlinie von f und $a \in N_0(f)$, dann ist grad $f(a)$ senkrecht zum Tangetialraum von $N_0(f)$.

g) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^n$, so konvergiert für $f(x) = Ax + b$ das Newton – Verfahren zur Lösung von $f(x) = 0$ in endlich vielen Schritten für beliebige Startwerte.

h) Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1}$ ist für alle (x_1, x_2) mit $|x_1| \leq 1$ gut koordiniert.

i) Die Zykloide, gegeben durch $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (1 - \sin(t)\,, 1 - \cos(t))$ ist eine rektifizierbare Kurve und hat für $t \ \in [0, 2\,\pi]$ die Bogenlänge 8.

j) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 - y^2 + x^3$ hat im Punkt $Q\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 2:

Ein Kegel hat die Höhe r und einen Kreis mit dem Radius r als Grundfläche.

Berechnen Sie das Volumen durch ein Mehrfachintegral.

Aufgabe 3:

a) Konstruieren Sie symmetrische Quadraturformel mit 2 Stützstellen auf [0,1] maximaler Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Ordnung dieser Quadraturformel oder begründen Sie, warum sie eine bestimmte Ordnung hat.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie ein Ausgleichsproblem $min_{x \epsilon \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2$ mit

$$A = \begin{matrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{matrix}$$

$$b = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

a) Bestimmen Sie die QR – Faktorisierung der Matrix A, wobei Q $\in \mathbb{R}^{3x3}$.

b) Finden Sie die Lösung des Ausgleichsproblems $min_{x\epsilon\mathbb{R}^n}\|b - Ax\|_2$ mit Hilfe von QR – Faktorisierung.

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie Lagrangsche Elementarpolynome $l_i(x)\ i = 0, 1, 2$ für $x_0 = \ -1\ x_1 = 2\ und\ x_2 = 3$ nach der Formel aus der Vorlesung.

b) Bestimmen Sie resultierendes Lagrange Interpolationspolynom für folgende Funktionswerte an Stützstellen $f(x_0) = 0, f(x_1) = -1, f(x_2) = 5$

Aufgabe 6:

Lösen Sie das Anfangsproblem für $y = y(t)$

a) $y' = t^3 y, y(2) = 4$

b) $y' - y = e^{2t}, y(0) = 0$

Aufgabe 7:

Zur Lösung des Anfangsproblems $y'(t) = f\big(t, y(t)\big), y(t_0) = y_0$ wobei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, kann man folgendes durch sein Butcher Tableau gegebene Runge – Kutte – Verfahren gegeben

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Iterationsvorschrift angeben, die man erhält, wenn man dieses Verfahren zur Lösung der linearen Differentialgleichung $y'(t) = A_y(t)$ verwendet.

b) Zeigen Sie, dass für hinreichend oft stetig differenzierbare Funktionen f der lokale Fehler $|y(t_0 + h) - y_1|$ in $O(h)$ liegt.

n = 1 darf angenommen werden