Übungsblatt 14: Extrablatt (Fakultativ!)

Abgabe bis 10.02.2022, 8:00 Uhr auf Moodle

Vorlesung *Mathematik I für Informatiker*, Institut für Mathematik,
Prof. Dr. M. Holschneider, Dr. H. Matuschek, Dr. B. Fiedler
https://moodle2.uni-potsdam.de/course/view.php?id=30637

Hinweis: *Bitte geben Sie in Gruppen von mindestens* ***drei*** *bis maximal* ***vier*** *Studierenden ab. Für die Zulassung zu der Klausur müssen mindestens 75% aller möglichen Punkte erreicht werden. Bei Fragen bitte eine E-Mail an* `hannes.matuschek@uni-potsdam.de`.

Bitte geben Sie dieses Blatt nur dann zur Kontrolle ab, wenn Sie noch Punkte für die Klausurnebenleistung benötigen!

Aufgabe 1: Seien $A; B; C$ Aussagen. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgende Aussageverbindung logisch äquivalent sind. **(2 Punkte)**

$$A \Rightarrow (B \vee C) \quad \text{und} \quad \neg B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Aufgabe 2: Sei $M = \mathbb{N}$ und **(2 Punkte)**

$$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \ \wedge \ |a - b| = 1\}$$

eine Relation auf M. Zeigen Sie, dass die Relation symmetrisch, aber nicht transitiv ist.

Aufgabe 3: Gegeben sei die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit **(4 Punkte)**

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2} \quad \text{sowie} \quad a_0 = 1.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_n = 5 - \frac{4}{2^n}$$

Aufgabe 4: Komplexe Zahlen

a) Skizzieren Sie die Menge **(2 Punkte)**

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \geq 4\}\ ,$$

in der gaußschen Zahlenebene.

b) Bestimmen Sie **alle** Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^5 + x^4 - 4\,x^3 - 4\,x^2 - 45\,x - 45$. **(3 Punkte)**

c) Geben Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 2i$ und $z_2 = \dfrac{2}{i}$ in exponentieller Darstellung an. Berechnen Sie **(2 Punkte)**

$$w = \frac{\overline{z_2}^4}{z_1^2}$$

und geben Sie das Ergebnis sowohl in der arithmetischen als auch in der Exponentialform an.

Aufgabe 5: Analysis

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe **(2 Punkte)**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} - 1\right)^n .$$

b) Prüfen Sie die Konvergenz der Reihe für $z = 0$ und $z = 4$! **(1 Punkte)**

c) Welche rationale Funktion verbirgt sich hinter dieser Potenzreihe? Benutzen Sie dafür die geometrische Reihe! **(1 Punkte)**

Aufgabe 6: Differential- & Integralrechnung

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle lokalen Extrema der Funktion **(5 Punkte)**
$$f(x) = x^2\, e^{-x^2} .$$
2. Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\, dx$. **(3 Punkte)**
3. Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \sqrt{1 - x^2}\, dx$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 7: Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwort an. (Nur eine Antwort ist richtig!) **(6 Punkte)**

a) Wie lautet der maximale Definitionsbereich der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \ ?$$

☐ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ ☐ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < 2) \vee (x > 2)\}$

☐ $D = (-2, 2)$ ☐ $D = (-\infty, 2) \cap (2, \infty)$

☐ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$ ☐ keine der Aussagen

b) Welches ist das Taylorpolynom 1. Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{1-x}$ an der Stelle $x_0 = 1$?

☐ $p_1(x) = x - 1$ ☐ $p_1(x) = 2x - 1$ ☐ $p_1(x) = -x$

☐ $p_1(x) = x$ ☐ $p_1(x) = x - 2$ ☐ keine der Aussagen

c) Wie lautet der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + 1 - e^x}{x^2} ?$$

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{1}{2}$

☐ 1 ☐ 2 ☐ keine der Angaben

d) Für die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, welche die Gleichung $f'(x) = f(x)$ sowie $f(0) = 1$ erfüllt, gilt

☐ $f(x) = \cos(x)$ ☐ $f(x) = x^2$ ☐ $f^{(n)}(x) = f(x)$

☐ f ist nicht stetig auf $\mathbb{R}$. ☐ $f(x) = 1$ ☐ keine der Angaben.

e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Dann gilt: Es gibt einen Punkt $\xi \in (0,1)$, so dass das Rechteck mit Höhe $f(\xi)$ und Breite 1 den Flächeninhalt

$$A = \int_0^1 f(x)d\,x$$

hat.

☐ wahr ☐ falsch

f) Die Funktion $f \ : \ \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = |x-1|$ ist bijektiv.

☐ wahr ☐ falsch

Viel Spaß und viel Erfolg!