# Altklausur – Grundlagen der Stochastik (2022)

Autor-Bemerkung: Symbole mit doppelten Strichen werden mit "I" davor vermerkt.
"IP" ist als $\mathbb{P}$ zu lesen, "IN" als $\mathbb{N}$ usw.

---

## 1. Aufgabe Grundbegriffe

Es sei (Ω, IP) ein Wahrscheinlichkeitsraum.
a) Wie heißen die Elemente in Ω?
b) Wie wird die Funktion IP bezeichnet?
c) Geben Sie die beiden Eigenschaften (P1) und (P2) der Funktion IP an.

## 2. Aufgabe Laplace-Räume

Es sei (Ω, IP) ein Laplace-Raum mit

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Weiter sei $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$.
a) Bestimmen Sie IP(A).
b) Bestimmen Sie $IP_A(k)$ für alle $k \in \Omega$.

## 3. Aufgabe Unabhängigkeit

Es seien (Ω, IP) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega$.
a) Wann heißen A und B per Definition unabhängig?
b) Geben Sie eine äquivalente Bedingung an, sodass A und B unabhängig sind.

## 4. Aufgabe Zufallsvariablen

Wir betrachten das Zufallsexperiment 4 Mal Würfeln mit einem regulären Würfel und Aufschreiben der Resultate.
a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Anzahl der Ergebnisse an.
b) Geben Sie eine Zufallsvariable X an, welche das Addieren der vier gewürfelten Augenzahlen modelliert.
c) Geben Sie den Wertebereich der Zufallsvariable X an.

## 5. Aufgabe Besondere Verteilungen

Es seien $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $| X(\Omega) | = n$ und $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ für alle $k \in X(\Omega)$

b) $X(\Omega) = \{0, 1\}$ und $\mathbb{P}(X = 1) = p$

c) $X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\}$ und $p \in [0, 1]$ und $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für alle $k \in X(\Omega)$

d) $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$ und $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ für alle $k \in X(\Omega)$

e) $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$ und $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ für alle $k \in X(\Omega)$

Geben Sie jeweils an, welcher Verteilung X entspricht.

## 6. Aufgabe Summe von Bernoulli-Verteilungen

In einer Urne sind 3 blaue und 7 rote Kugeln. Sie ziehen 10 Kugeln jeweils mit Zurücklegen. Beim Ziehen einer blauen Kugel (dieses Ergebnis wird mit *b* bezeichnet) gibt es 1 Punkt, beim Ziehen einer roten Kugel (dieses Ergebnis wird mit *r* bezeichnet) gibt es 0 Punkte. Entsprechend ist $(\{r, b\}, \mathbb{P})$ ein Bernoulli-Experiment mit $\mathbb{P}(b) = p = 0{,}3$.

Für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sei

$$Y_i : \{r, b\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } Y_i(r) = 0 \text{ und } Y_i(b) = 1.$$

Desweiteren sei

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad .$$

Berechnen Sie

a) den Erwartungswert E(X) von X,

b) die Varianz Var(X) auf <u>zwei</u> verschiedene Wege,

c) die Standardabweichung $\sigma(X)$ von X.